

Засоби реалізації алгоритмів чисельних методів

Ірина Сергіївна Мінтій*, Світлана Вікторівна Шокалюк[#],
Михайло Михайлович Мінтій

Кафедра інформатики та прикладної математики, Криворізький
державний педагогічний університет, пр. Гагаріна, 54, м. Кривий Ріг,
50086, Україна

irina.mintiy@gmail.com*, ksv_ipm@mail.ru[#]

Анотація. *Метою* даного дослідження є визначення педагогічних умов вибору засобів ІКТ навчання обчислювальної математики, основним *завданням* – демонстрація розроблених методичних рекомендацій для вступного лабораторного заняття з курсу методів обчислень, *об'єкт* дослідження – процес комп'ютерно-орієнтованого навчання студентів ЗВО, *предмет* – засоби реалізації чисельних алгоритмів.

Методи дослідження: 1) *теоретичні* – вивчення праць вітчизняних авторів, присвячених проблемам використання засобів ІКТ при вивченні обчислювальної математики, 2) *емпіричні* – дослідження сучасного стану підготовки студентів ЗВО до використання засобів ІКТ у процесі вивчення обчислювальної математики, спостереження, узагальнення педагогічного досвіду.

Результати: наведено практичні завдання для вступної лабораторної роботи з курсу обчислювальної математики для виконання у середовищі електронних таблиць (ЕТ) та систем комп'ютерної математики (СКМ), результати виконання завдань та робочий зміст курсу методів обчислень.

Основні висновки і рекомендації: необхідно формувати у студентів навички ефективного поєднання засобів ІКТ та знати альтернативи використовуваним засобам.

Ключові слова: обчислювальна математика; методи обчислень; засоби ІКТ; електронні таблиці; MS Excel; OOo Calc; Google Sheets; системи комп'ютерної математики; Maxima; Maple; Sage.

I. S. Mintii*, S. V. Shokaliuk[#], M. M. Mintii. Tools of implementation of numerical methods algorithms

Abstract. The *purpose* of this study is to determine the pedagogical conditions of ICT choice for teaching computational science, the main task is to demonstrate the developed guidelines for introductory laboratory training course in numerical methods, the *object* of study is the process of computer-based teaching of university students, the *subject* is the tools of implementing numerical algorithms.

Research methods: 1) *theoretical* – study of the works of Ukrainian authors on the problems of the use of ICT in the learning of numerical methods; 2) *empirical* – a study of the current state of university students training to the use of ICT in the learning of numerical methods, monitoring, summarizing teaching experience.

The *results* are practical tasks for introductory laboratory course work in numerical methods to perform in a spreadsheet environment and computer algebra systems, the results of the tasks and content of the course.

Key conclusions and recommendations: students' skills in effective combination of ICT tools and the knowledge of alternatives should be formed.

Keywords: computational science; numerical methods; ICT tools; spreadsheets; MS Excel; OOo Calc; Google Sheets; computer mathematics systems; Maxima; Maple; Sage.

Affiliation: Department of Computer Science and Applied Mathematics, Kryvyi Rih State Pedagogical University, 54, Gagarin Ave., Kryvyi Rih, 50086, Ukraine.

E-mail: irina.mintiy@gmail.com*, ksv_ipm@mail.ru#.

Курс «Методи обчислень» (або ж «Чисельні методи») є класичним курсом для підготовки студентів фізико-математичних та природничих спеціальностей. Так, у Криворізькому державному педагогічному університеті курс належить до дисциплін варіативної частини циклу професійної та практичної підготовки бакалаврів кваліфікації «Вчитель математики», «Вчитель фізики» та циклу природничо-наукової, професійної та практичної підготовки спеціалістів кваліфікації «Вчитель хімії».

Принцип сучасності вимагає використання відповідних засобів ІКТ у процесі оволодіння курсом. Враховуючи швидкоплинність розвитку ІКТ, сьогодні неможливо підготувати компетентного випускника ЗВО, навчивши його роботі з одним із засобів ІКТ: необхідно сформувані вміння обирати засоби для розв'язання задачі, обґрунтовувати свій вибір; знати альтернативи для використовуваних засобів. Як зазначає Ю. В. Триус, «розв'язування складних математичних задач одразу за допомогою кількох систем істотно підвищує ймовірність одержання коректних результатів... Доцільно формувати у студентів вміння і навички роботи з кількома СКМ» [5, с. 384].

Питання ІКТ для підтримки обчислювальної математики розглядається у працях М. І. Жалдака та Ю. В. Триуса [1] (Excel, Mathcad, Matlab, Mathematica), Ю. Г. Лотюка [2] (Mathcad, Mathematica), М. В. Рафальської [3] (Excel, Maple, Maxima, Sage), С. О. Семерікова [4] (розроблені педагогічні програмні засоби на основі об'єктно-

орієнтованого програмування).

У зв'язку з різноманіттям засобів реалізації чисельних алгоритмів, а також умов їх успішного використання у навчальному процесі в аудиторній роботі та позанавчальний час виникає необхідність не прив'язуватися до одного конкретного засобу ІКТ, а формувати у студентів навички ефективного та гармонійного їх поєднання.

Саме тому метою вступної лекції з даного курсу, окрім розгляду предмету й особливостей обчислювальної математики, розкриття основних визначень, є актуалізація та поглиблення знань студентів щодо роботи у середовищі ЕТ – Excel, Calc або Google Sheets – та ознайомлення їх з особливостями розв'язання завдань за допомогою інструментарію СКМ – Sage, Махіма або Maple – віддаючи перевагу хмарно орієнтованим засобам, якими є ЕТ Google Sheets та СКМ Sage.

Для набуття первинних навичок роботи із засобами реалізації чисельних алгоритмів до системи завдань вступної лабораторної роботи включено завдання, розв'язання яких «вручну» вже не є проблематичним, а саме:

1) виконання операцій над матрицями (алгебраїчне додавання, множення матриці на скаляр, множення матриць);

2) розв'язання СЛАР матричним методом та за формулами Крамера;

3) побудова графіків функцій та залежностей між змінними.

Орієнтовний зміст методичних рекомендацій для проведення такої лабораторної роботи наводиться далі за текстом.

У *теоретичних відомостях* розглянуто питання щодо організації роботи з основними функціями в ЕТ (див. табл. 1) та СКМ (див. табл. 2).

Таблиця 1

Функції для розв'язання завдань в ЕТ

Операція	Функції	
	Excel	Calc, Sheets
Задання матриці	–	–
Ранг матриці	–	–
Визначник матриці	МОПРЕД()	MDETERM()
Транспонування матриці	ТРАНСП()	TRANSPOSE()
Обернення матриці	МОБР()	MINVERSE()
Множення матриць	МУМНОЖ()	MMULT()
Розв'язання рівнянь та їх систем	–	–
Побудова графіків функцій	1) табулювання функції на проміжку з кроком; 2) побудова графіка функції за допомогою майстра	

Для виконання завдань засобами Sage пропонується обрати один із діючих на сьогодні повно функціональних серверів:

- <http://www.sagenb.org/>;
- <https://cocalc.com/>;
- <https://sagecell.sagemath.org/>.

Таблиця 2

Функції для розв'язання завдань у СКМ

Операція	Функції		
	Sage	Maxima	Maple
Задання матриці	matrix([[], [], ..., []]) або matrix(n, m, [a ₁ , a ₂ , a _{n*m}])	matrix([], [], ..., [])	matrix(n, m, [a ₁ , a ₂ , a _{n*m}])
Ранг матриці	rank()		
Визначник матриці	det()	determinant()	det()
Транспонування матриці	transpose()		
Обернення матриці	inverse()		
Множення матриць	A*B	A.B	multiply(A,B)
Розв'язання рівнянь та їх систем	solve()		
Побудова графіків функції	plot(f(x) [, startarg, finisharg, rgbcolor, ymin=c, ymax=d])	plot2d(f(x), x, startarg, finisharg)	plot(f(x), x= startarg..finisharg, y=c..d, color)

Оформлений звіт про виконання *практичних завдань* у середовищі ЕТ та СКМ пропонується розмістити на диску власного Google-акаунту та надати викладачеві доступ для його перегляду. Перевагою такої форми звітності є те, що викладач у будь-який момент часу може бачити результати роботи студента, встановити часову відповідність її виконання навіть за відсутності студента на занятті.

Завдання 1. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Очікувані результати виконання завдання наведено на рис. 1, 2.

	A	B	C	D	E	F
1	A					
2	1	1	4	0		
3	0	-3	2	1	=	=MDETERM(A2:D5)
4	2	1	-1	2		
5	-1	0	3	4		

Рис. 1. Очікуваний результат виконання завдання 1 в ЕТ
(на прикладі Google Sheets)

```
A=matrix([ [1, 1, 4, 0], [0, -3, 2, 1], [2, 1, -1, 2], [-1, 0, 3, 4] ]);
det(A)
```

164

Рис. 2. Очікуваний результат виконання завдання 1 у СКМ
(на прикладі Sage)

Завдання 2. Знайти значення многочлена $f(x)$, при $x = A$, де A – задана

матриця: $f(x) = x^2 + 4x - 7$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Очікувані результати виконання завдання наведено на рис. 3-5.

	A	B	C
1	A		
2	5	1	0
3	0	-2	3
4	2	0	-4
5	A^2		
6	=MMULT(A2:C4;A2:C4)	=CONTINUE(A6; 1; 2)	=CONTINUE(A6; 1; 3)
7	=CONTINUE(A6; 2; 1)	=CONTINUE(A6; 2; 2)	=CONTINUE(A6; 2; 3)
8	=CONTINUE(A6; 3; 1)	=CONTINUE(A6; 3; 2)	=CONTINUE(A6; 3; 3)
9	4*A		
10	=4*A2	=4*B2	=4*C2
11	=4*A3	=4*B3	=4*C3
12	=4*A4	=4*B4	=4*C4
13	E		
14	1	0	0
15	0	1	0
16	0	0	1
17	-7*E		
18	=-7*A14	=-7*B14	=-7*C14
19	=-7*A15	=-7*B15	=-7*C15
20	=-7*A16	=-7*B16	=-7*C16

Рис. 3. Очікуваний результат виконання завдання 2 (початок) в ЕТ
(на прикладі Google Sheets)

E	F	G
A^2+4*A-7		
=A6+A10+A18	=B6+B10+B18	=C6+C10+C18
=A7+A11+A19	=B7+B11+B19	=C7+C11+C19
=A8+A12+A20	=B8+B12+B20	=C8+C12+C20

Рис. 4. Очікуваний результат виконання завдання 2 (кінець) в ЕТ (на прикладі Google Sheets)

```
A=matrix([[5, 1, 0], [0, -2, 3], [2, 0, -4]]);
f=A^2+4*A-7;
f
```

$$\begin{pmatrix} 38 & 7 & 3 \\ 6 & -11 & -6 \\ 10 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

Рис. 5. Очікуваний результат виконання завдання 2 у СКМ (на прикладі Sage)

Завдання 3. Розв'язати СЛАР:

- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- за допомогою внутрішніх функцій СКМ (у Sage – solve() та solve_right()).

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2; \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Очікувані результати виконання завдань наведено на рис. 6-10.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	A			B			X	Перевірка A*X=B
2	1	-2	1	-2			=F12/F7	=MMULT(A2:C4;G2:G4)
3	5	4	-1	0			=F16/F7	=CONTINUE(H2; 2; 1)
4	3	1	1	2			=F20/F7	=CONTINUE(H2; 3; 1)
5								
6		=A2	=B2	=C2				
7	Δ=	=A3	=B3	=C3	=	=MDETERM(B6:D8)		
8		=A4	=B4	=C4				
9								
10								
11		=D2	=B2	=C2				
12	Δ1=	=D3	=B3	=C3	=	=MDETERM(B11:D13)		
13		=D4	=B4	=C4				
14								
15		=A2	=D2	=C2				
16	Δ2=	=A3	=D3	=C3	=	=MDETERM(B15:D17)		
17		=A4	=D4	=C4				
18								
19		=A2	=B2	=D2				
20	Δ3=	=A3	=B3	=D3	=	=MDETERM(B19:D21)		
21		=A4	=B4	=D4				

Рис. 6. Очікуваний результат виконання завдання 3.а в ЕТ (на прикладі Google Sheets)

	A	B	C	D	E	F
1		A		B		X
2	1	-2	1	-2	=MMULT(A7:C9;D2:D4)	
3	5	4	-1	0	=CONTINUE(F2; 2; 1)	
4	3	1	1	2	=CONTINUE(F2; 3; 1)	
5						
6		A-1				
7	=MINVERSE(A2:C4)	=CONTINUE(A7; 1; 2)	=CONTINUE(A7; 1; 3)			
8	=CONTINUE(A7; 2; 1)	=CONTINUE(A7; 2; 2)	=CONTINUE(A7; 2; 3)			
9	=CONTINUE(A7; 3; 1)	=CONTINUE(A7; 3; 2)	=CONTINUE(A7; 3; 3)			

Рис. 7. Очікуваний результат виконання завдання 3.б в ЕТ
(на прикладі Google Sheets)

```

A=matrix([[1,-2,1],[5,4,-1],[3,1,1]]);
B=matrix([[-2],[0],[2]]);
A1=matrix([[-2,-2,1],[0,4,-1],[2,1,1]]);
A2=matrix([[1,-2,1],[5,0,-1],[3,2,1]]);
A3=matrix([[1,-2,-2],[5,4,0],[3,1,2]]);
x1=det(A1)/det(A);
x2=det(A2)/det(A);
x3=det(A3)/det(A);
X=matrix([[x1],[x2],[x3]]);
show(X)
# Перевірка A*X=B
show(A*X)

```

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Рис. 8. Очікуваний результат виконання завдання 3.а у СКМ
(на прикладі Sage)

```

A=matrix([[1,-2,1],[5,4,-1],[3,1,1]]);
B=matrix([[-2],[0],[2]]);
A1=A.inverse();
X=A1*B;
X

```

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Рис. 9. Очікуваний результат виконання завдання 3.б у СКМ
(на прикладі Sage)

```

x1,x2,x3=var('x1,x2,x3')
solve([x1-2*x2+x3==-2,5*x1+4*x2-x3==0,3*x1+x2+x3==2],x1,x2,x3)

```

$$[[x_1 = (-1), x_2 = 2, x_3 = 3]]$$

Рис. 10. Очікуваний результат виконання завдання 3.в в СКМ
(на прикладі Sage)

Завдання 4*. Дослідити сумісність системи:

$$\begin{cases} x_1 & + 2x_3 & - x_4 & = 0; \\ 3x_1 & + x_2 & + 6x_3 & - 3x_4 & = 3; \\ 4x_1 & - x_2 & + 8x_3 & - 4x_4 & = -3; \\ 2x_1 & + x_2 & + 4x_3 & - 2x_4 & = 3. \end{cases}$$

* – завдання може бути вирішено лише у середовищі СКМ.

```
A=matrix([[1, 0, 2, -4], [3, 1, 6, -3], [4, -1, 8, -4], [2, 1, 4, -2]]);
print(rank(A));
B=matrix([[1, 0, 2, -4, 0], [3, 1, 6, -3, 3], [4, -1, 8, -4, -3], [2, 1, 4, -2, 3]]);
print(rank(B))
```

3
3

rank(A)=rank(B). Система сумісна

Рис. 11. Очікуваний результат виконання завдання 4 у СКМ (на прикладі Sage)

Завдання 5. Побудувати графік функції $y = \frac{x}{x^2 - 4}$.

Очікувані результати виконання завдання наведено на рис. 12, 13.

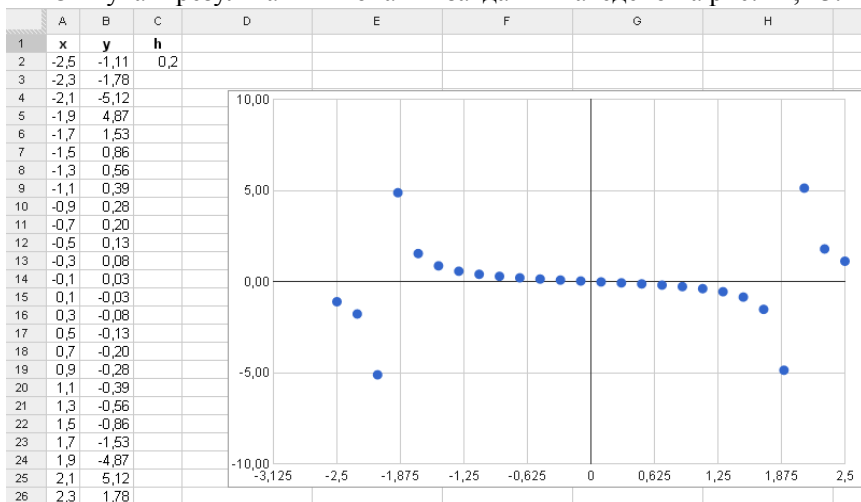


Рис. 12. Очікуваний результат виконання завдання 5 у ET (на прикладі Google Sheets)


```
plot(x/(x^2-4), (-2.5, 2.5), ymin=-5, ymax=5, rgbcolor='red', thickness=3)
```

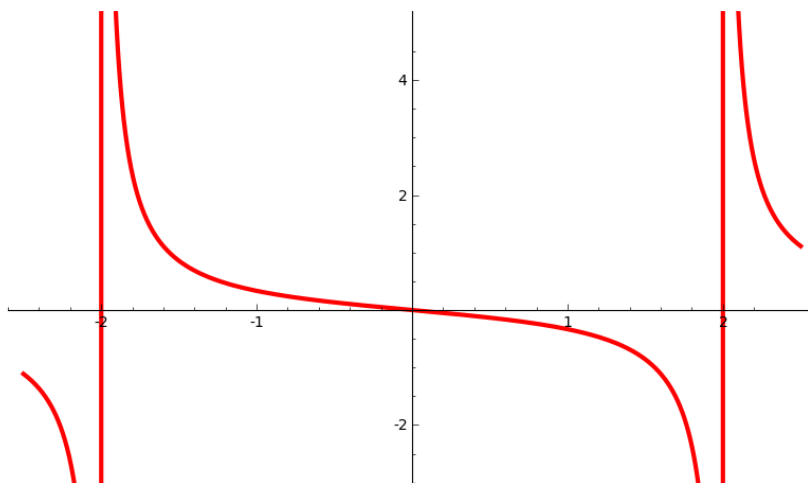


Рис. 13. Очікуваний результат виконання завдання 5 у СКМ
(на прикладі Sage)

Навички, набуті студентами під час виконання завдань даної лабораторної роботи, сприятимуть успішному опануванню подальшого змісту курсу (див. табл. 3), не відволікаючи від змісту власне чисельних алгоритмів за рахунок універсальності, простоти та інтуїтивної зрозумілості інструментарію.

Таблиця 3

Робочий зміст курсу «Методи обчислень» («Чисельні методи»)

№ теми	Назва теми	Кваліфікація								
		учитель математики			учитель фізики			учитель хімії		
		лк	лз	с	лк	лз	с	лк	лз	с
1.	Обчислювальна математика: предмет, особливості. Засоби реалізації алгоритмів чисельних методів	2	4	2	2	4	4	2 2	4	3
2.	Основи теорії похибок	2	4	2	2	4	4		2	3
3.	Чисельні методи розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь	2	4	2	2	4	4	2	4	2
4.	Прямі методи розв'язання СЛАР	2	2	1	2	4	4	1	2	3
5.	Методи обчислення значення визначника	22	—	2	—	2	2	—	—	2

№ теми	Назва теми	Кваліфікація								
		учитель математики			учитель фізики			учитель хімії		
		лк	лз	с	лк	лз	с	лк	лз	с
6.	Методи обернення матриці		–	8		2	8		–	2
7.	Ітераційні методи розв'язання СЛАР	2	2	1	2	4	4	1	2	3
8.	Методи пошуку власних значень та векторів матриці	2	4	2	2	4	4	–	2	4
9.	Методи розв'язання систем нелінійних рівнянь	2	–	10	2	–	10	2	–	10
10.	Інтерполяція	4	4	2	2	4	4	2	4	2
11.	Апроксимація	2	2	2	2	2	4		2	2
12.	Методи чисельного диференціювання	2	–	10	2	4	10	2	–	10
13.	Інтерполяційні квадратурні формули	4	2	2	4	4	4		2	4
14.	Чисельні методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь та їх систем	4	8	8	2	8	8	2	6	8
15.	Чисельні методи розв'язання крайових задач	2			2		4	–		3
16.	Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними	2			2		4	–		3
Всього годин		36	36	54	30	50	82	14	30	64

Таким чином, педагогічно доцільне і виважене поєднання кількох засобів ІКТ надає можливість підвищити інтенсивність навчально-пізнавальної діяльності студентів, мотивацію вивчення теоретичного матеріалу і курсу з обчислювальної математики в цілому.

Список використаних джерел

1. Жалдак М. І. Основи теорії і методів оптимізації : [навч. посіб. для студ. мат. спец. вищ. навч. закл.] / М. І. Жалдак, Ю. В. Триус. – Черкаси : Брама-Україна, 2005. – 607 с.
2. Лотюк Ю. Г. Комп'ютерно-орієнтована методична система навчання обчислювальної математики в педагогічному університеті : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 – теорія та методика навчання інформатики / Лотюк Юрій Георгійович ; Національний педагогічний ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К., 2004. – 228 с.

3. Рафальська М. В. Формування інформатичних компетентностей майбутніх вчителів інформатики у процесі навчання методів обчислень : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 – теорія і методика навчання (інформатика) / Рафальська Марина Володимирівна ; Національний педагогічний ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К., 2010. – 225 с.

4. Семеріков С. О. Активізація пізнавальної діяльності студентів при вивченні чисельних методів у об'єктно-орієнтованій технології програмування : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 – теорія та методика навчання інформатики / Семеріков Сергій Олексійович ; Криворізький державний педагогічний ун-т. – Кривий Ріг, 2000. – 256 с.

5. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах : дис. ... доктора пед. наук : 13.00.02 – теорія і методика навчання інформатики / Триус Юрій Васильович ; Черкаський національний ун-т ім. Б. Хмельницького. – Черкаси, 2005. – 649 с.

References (translated and transliterated)

1. Zhaldak M. I. Osnovy teorii i metodiv optymizatsii [Fundamentals of the theory and methods of optimization] : [navch. posib. dlia stud. mat. spets. vyshch. navch. zakl.] / Zhaldak M. I., Tryus Yu. V. – Cherkasy : Brama-Ukraina, 2005. – 607 s. (In Ukrainian)

2. Lotiuk Yu. H. Kompiuterno-oriientovana metodychna systema navchannia obchysliuvalnoi matematyky v pedahohichnomu universyteti [Computer-oriented methodical system of teaching computational mathematics in the pedagogical university] : dys. ... kand. ped. nauk : 13.00.02 – teoriia ta metodyka navchannia informatyky / Lotyuk Yurii Heorhiiiovych ; Nacionalnyi pedahohichniy un-t im. M. P. Drahomanova. – K., 2004. – 228 s. (In Ukrainian)

3. Rafalska M. V. Formuvannia informatsiichnykh kompetentnostei maibutnikh vchyteliv informatyky u protsesi navchannia metodiv obchyslen [Formation of informative competences of future teachers of informatics in the process of teaching methods of computing] : dys. ... kand. ped. nauk : 13.00.02 – teoriia i metodyka navchannia (informatyka) / Rafalska Maryna Volodymyrivna ; Nacionalnyi pedahohichniy un-t im. M. P. Drahomanova. – K., 2010. – 225 s. (In Ukrainian)

4. Semerikov S. O. Aktyvizatsiia piznavalnoi diialnosti studentiv pry vyvchenni chyselnykh metodiv u obiektno-oriientovanii tekhnolohii prohramuvannia [Activation of cognitive activity of students in the study of numerical methods in object-oriented programming technology] : dys. ... kand. ped. nauk : 13.00.02 – teoriia ta metodyka navchannia informatyky / Semerikov Serhii Oleksiiovych ; Kryvorizkyi derzhavnyi pedahohichniy un-t.

– Kryvyi Rih, 2000. – 256 s. (In Ukrainian)

5. Tryus Yu. V. Kompiuterno-oriientovani metodychni systemy navchannia matematychnykh dystsyplin u vyshchykh navchalnykh zakladakh [Computer-oriented methodical systems of teaching mathematical disciplines in higher educational institutions] : dys. ... doktora ped. nauk : 13.00.02 – teoriia i metodyka navchannia informatyky / Tryus Yurii Vasylovych ; Cherkaskyi natsionalnyi un-t im. B. Khmelnytskoho. – Cherkasy, 2005. – 649 s. (In Ukrainian)